Analiza wyników matury 2017 z matematyki

Mieczysław Fałat
OKE we Wrocławiu

Poziom podstawowy egzaminu, maj 2017

Arkusz dla poziomu podstawowego (nowa formuła)

25 zadań zamkniętych WW1 (0-1)

9 zadań otwartych (6x2p, 2x4p, 1x5p)

25791 zdających po raz pierwszy, średni wynik to 27 punktów (54%), mediana wyników to 23 punkty (46%)

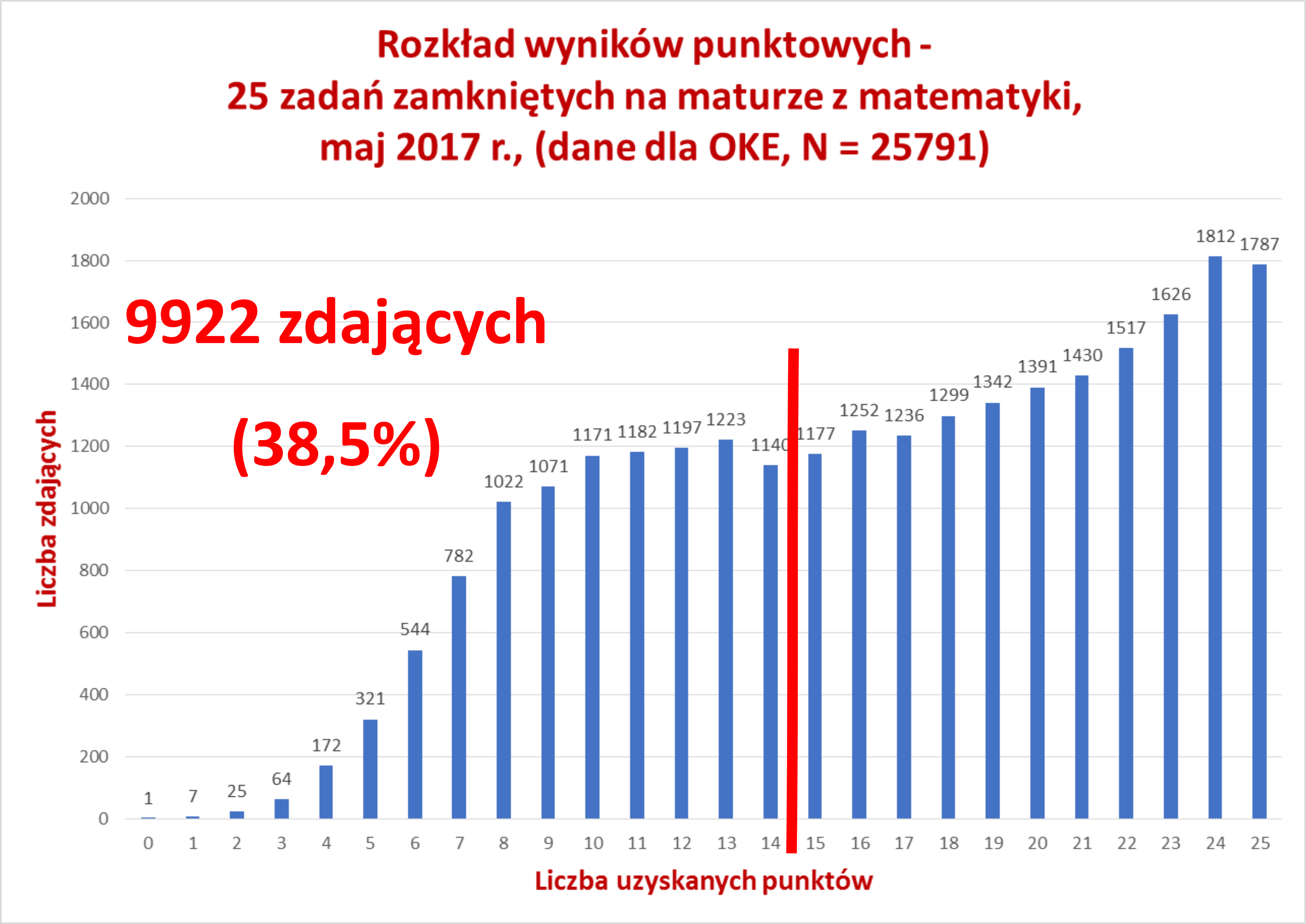
Co wypadło najlepiej na poziomie podstawowym?

Zadania zamknięte, badające umiejętności stosowania:

- statystyki opisowej w typowych sytuacjach (Z24),
- własności ciągu arytmetycznego (Z12),
- własności miarowych w figurach przestrzennych (Z23),
- zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym (Z15).

Nie były to zadania jednoczynnościowe, sprowadzające się do zastosowania jednej definicji lub podstawienia do jednego wzoru.

Zadania zamknięte na maturze z matematyki w 2017 r. (PP)



Średni wynik w zadaniach zamkniętych to 16,5 punktu

Zadania otwarte na maturze z matematyki w 2017 r. (PP)

Zadania otwarte – średni wynik to 8,5 punktu

Co sprawiło najwięcej kłopotów?

Zadania otwarte badające umiejętności:

- przeprowadzenia dowodu geometrycznego (Z28),
- dobrania strategii rozwiązania zadania z geometrii przestrzennej (Z34), funkcji kwadratowej (Z29), geometrii analitycznej (Z32).

Co sprawiło najwięcej kłopotów?

Spośród zadań zamkniętych najtrudniejsze było zadanie nr 2 (0,40 - w kraju 0,43).

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{52}$ **B.** 3 **C.** $2\sqrt[3]{2}$ **D.** 2

Niewiele lepiej wypadło zadanie nr 5 (0,44 - kraj 0,47).

Zadanie 5. (0–1)

Równość $\left(x\sqrt{2}-2\right)^2=\left(2+\sqrt{2}\right)^2$ jest

A. prawdziwa dla $x=-\sqrt{2}$.

B. prawdziwa dla $x=\sqrt{2}$.

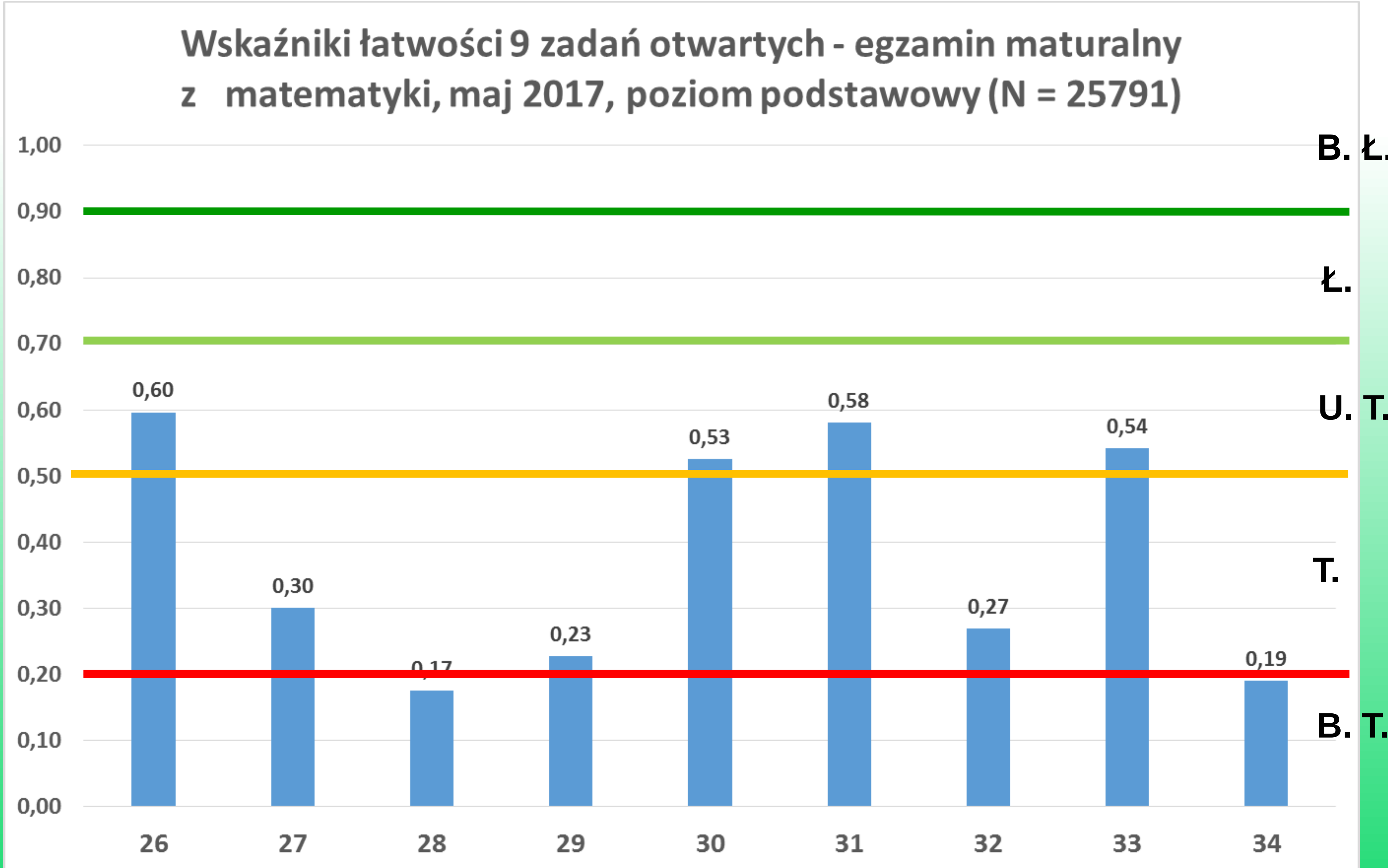
C. prawdziwa dla $x=-1$.

D. fałszywa dla każdej liczby x.

(Nie)sprawności rachunkowe

Egzaminatorzy zauważali stosunkowo częste kłopoty zdających z przeprowadzaniem poprawnych obliczeń na różnych etapach rozwiązania zadania oraz błędy przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.

Zadania otwarte, maj 2017 (PP)



KRAJ	0,66	0,36	0,21	0,26	0,6	0,65	0,31	0,6	0,23

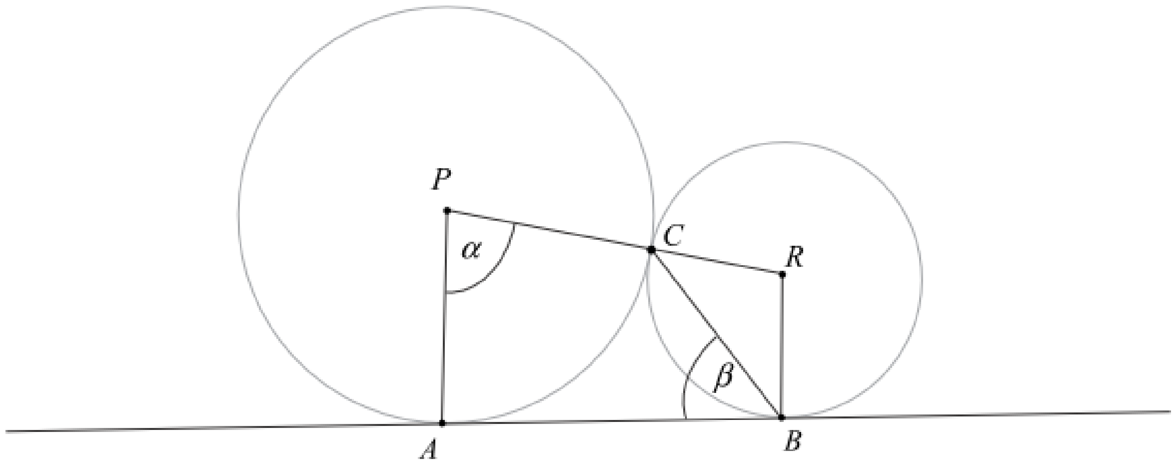
Opuszczenia zadań otwartych, maj 2017 (PP)

26.	27.	28.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
4,8%	26,7%	40,1%	27,2%	5,9%	9,3%	22,0%	15,4%	18,5%

Najczęściej opuszczane zadania otwarte, maj 2017 (PP)

Zadanie 28. (0–2)

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.



40,1%

Zadanie 29. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$.

Oblicz wartość współczynnika a.

27,2%

Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że liczba $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

26,7%

Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A = (-4,0)$ i $M = (2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

22,0%

Rozkłady punktów uzyskanych w 9 zadaniach otwartych, maj 2017 (PP)

Z26	Z27	Z28	Z29	Z30	Z31	Z32	Z33	Z34
29,6%	68,4%	82,0%	64,7%	36,1%	36,2%	53,2%	33,5%	69,7%
21,5%	3,1%	1,1%	13,2%	22,7%	11,5%	17,6%	24,6%	10,5%
48,9%	28,5%	16,9%	3,2%	41,2%	52,3%	5,7%	41,9%	3,7%
			4,3%			2,9%		6,5%
			14,5%			6,1%		9,7%
						14,4%		

Zadanie ze stereometrii było bardzo trudne

Zadanie 34. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wskaźnik łatwości zadania = 0,19

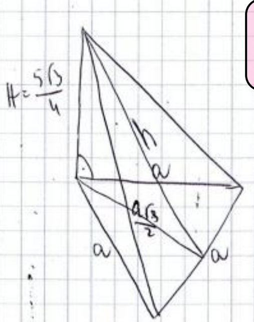
18,5% opuszczeń

	34.
0 p.	69,7%
1 p.	10,5%
2 p.	3,7%
3 p.	6,5%
4 p.	9,7%

Błędna interpretacja bryły

Zadanie 34. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



$$\boxed{2\cdot\frac{5\sqrt3}{4}\cdot a\cdot\frac{1}{2}+\frac{a\cdot h}{2}=\frac{15\sqrt3}{4}}$$

$$H^2+\left(\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2=h^2$$

$$\left(\frac{5\sqrt3}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2=h^2$$

$$\frac{25\cdot3}{16}+\frac{a^2\cdot3}{4}=h^2$$

$$\frac{75}{16}+\frac{12a^2}{16}=h^2$$

$$\frac{12a^2+75}{16}=h^2$$

$$12a^2+75=16h^2$$

$$\frac{5\sqrt3\cdot a}{4}+\frac{ah}{2}=\frac{15\sqrt3}{4}\quad /\cdot4$$

$$5\sqrt3a+2ah=15\sqrt3$$

$$a(5\sqrt3+2h)=15\sqrt3$$

$$a=\frac{15\sqrt3}{5\sqrt3+2h}\quad\cancel{=\frac{15\sqrt3\cdot(5\sqrt3+h)}{(5\sqrt3+h)^2}=\frac{225+15\sqrt3h}{75+10\sqrt3h+h^2}}$$

$$12a^2+75=16h^2\qquad 12\cdot\left(\frac{15\sqrt3}{5\sqrt3+2h}\right)^2+75=16h^2$$

$$\cancel{12\cdot\left(\frac{15\sqrt3}{5\sqrt3+h}\right)^2+75=16h^2}\qquad 12\cdot\frac{675}{75+20\sqrt3h+4h^2}+75=16h^2$$

$$\cancel{12\cdot\frac{675}{75+10\sqrt3h+h^2}+75=16h^2}$$

$$V=\frac13\cdot\frac{a^2\sqrt3}{4}\cdot\frac{5\sqrt3}{4}\qquad\cancel{\left(\frac{15\sqrt3}{5\sqrt3+2h}\right)^2}$$

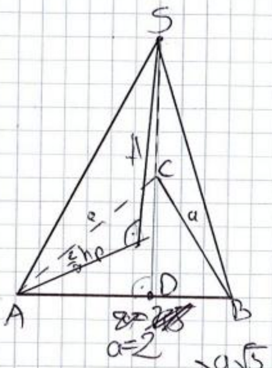
Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	0p

Błądzenie zakończone sukcesem

Zadanie 34. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



$a=2$

$\cancel{H=\frac{5\sqrt{3}}{4}}$

$\cancel{\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}}$ $\cancel{2a\sqrt{3}=5\sqrt{3}}$ $\cancel{a=2{,}5}$ ← dł. krawędzi podstawy

$P_1=\frac{2{,}5^2\sqrt{3}}{4}=$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ $\cancel{a^2\sqrt{3}\cdot 3=15\sqrt{3}}$ $\cancel{a^2=5 \quad (a>0) \quad a=\sqrt{5}}$

$(H_{ost})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{91}}{4}\right)^2$

$(H_{ost})^2+\frac{12}{9}=\frac{91}{16}$

$(H_{ost})^2=\frac{91}{16}-\frac{12}{9}$

$(H_{ost})^2=\frac{819}{144}-\frac{192}{144}$

$(H_{ost})^2=\frac{627}{144}$

$H_{ost}=\frac{\sqrt{627}}{12}$

$V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{627}}{12}=\frac{\sqrt{1881}}{36}=\frac{3\sqrt{209}}{36}=\frac{\sqrt{209}}{12}$

MMA_1P

$\cancel{\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{4}}$ $\cancel{P_b-P_1=\frac{15\sqrt{3}}{4}-\frac{6{,}25\sqrt{3}}{4}=}$ $\cancel{P_b-P_{1b}=\frac{15\sqrt{3}}{4}-\frac{17{,}5\sqrt{3}}{8}=\frac{17{,}5\sqrt{3}}{8}}$

$P_\Delta=\frac{a\cdot h}{2}$

$P_\Delta=\frac{a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}}{2}$

$2P_\Delta=a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}$

$8P_\Delta=a5\sqrt{3}$

Pole pow. bocznej → $3P_\Delta=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$P_\Delta=\frac{15\sqrt{3}}{12}$

$\frac{15\sqrt{3}}{12}\cdot 8=a\cdot 5\sqrt{3}$

$\frac{30\sqrt{3}}{3}=a5\sqrt{3}$

$10\sqrt{3}=a5\sqrt{3}$

dł. krawędzi podstawy → $a=2$

$P_p=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ ← pole podstawy

$\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2=|AS|^2$

$\frac{75}{16}+1=|AS|^2$

$\frac{91}{16}=|AS|^2$

$|AS|=\frac{\sqrt{91}}{4}$

$h_p=\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\frac{2}{3}h_p=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Odpowiedź: $V=\frac{\sqrt{209}}{12}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	34.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	4

MMA_1P

Strategia w typowym kontekście

Zadanie 29. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$.

Oblicz wartość współczynnika a.

Wskaźnik łatwości zadania = 0,23

27,2% opuszczeń

	29.
0 p.	64,7%
1 p.	13,2%
2 p.	3,2%
3 p.	4,3%
4 p.	14,5%

Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 16 p.

Niekonsekwencje i błędy.

Zadanie 29. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$.

Oblicz wartość współczynnika a.

$f(x)=ax^2+bx+c$ $\quad f_{max}=6$ $\quad f(-6)=\frac{3}{2}$

$q=6$ $\quad f(0)=\frac{3}{2}$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}=a\cdot 0^2+bx+c\\ \frac{3}{2}=(-6)^2a+bx+c\end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases}\frac{3}{2}=a+bx+c\\ \frac{3}{2}=36a+bx+c\end{cases}}$$

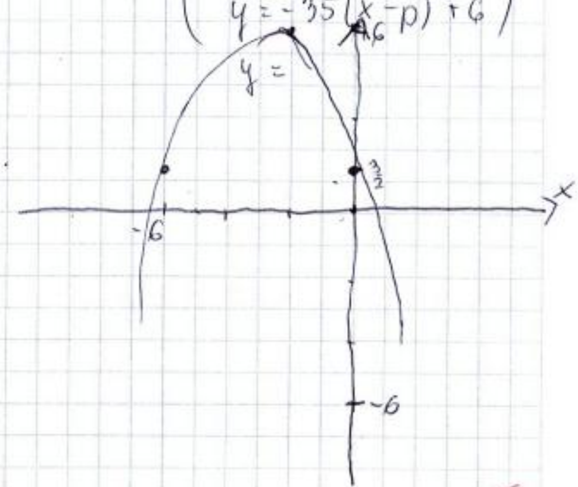
$\cancel{0=-35a+bx+c}$

$$\begin{cases}\frac{3}{2}=a+bx+c\\ \frac{3}{2}=(-6)^2a+bx+c\end{cases}$$

$0=-35a+0+0$

$y=a(x-p)^2+q$

$y=-35(x-p)^2+6$



Odpowiedź: $a=-35$

Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 14 p.

Zabrakło refleksji.

Zadanie 29. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$.

Oblicz wartość współczynnika a.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(-6) = \frac{3}{2} \quad \to \quad 36a - 6b + c = \frac{3}{2}$

$f(0) = \frac{3}{2} \quad \to \quad c = \frac{3}{2}$

$36a - 6b + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$36a - 6b = 0$

$b = 6a$

$p = ?$

$q = 6$

$\cancel{f(6) = 36a + 6b + \frac{3}{2}}$

$\cancel{36a - 6b + \frac{3}{2} = -\frac{b}{2a}}$

$6 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$6 = \frac{36a^2 - 6a}{4a}$

$24a = 36a^2 - 6a$

$36a^2 - 18a = 0$

$a^2 - \frac{1}{2}a = 0$

$a(a - \frac{1}{2}) = 0$

$a = 0$ sprz. $\vee$ $a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Odpowiedź: Współczynnik $a = \frac{1}{2}$

Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 18 p.

Zadanie 29. (0–4)
Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$.
Oblicz wartość współczynnika a.

Odpowiedź: Wspołczynnik a wynosi $-3+\frac{3}{2}\sqrt{6}$

Miłe złego początki …

Strategia w geometrii analitycznej

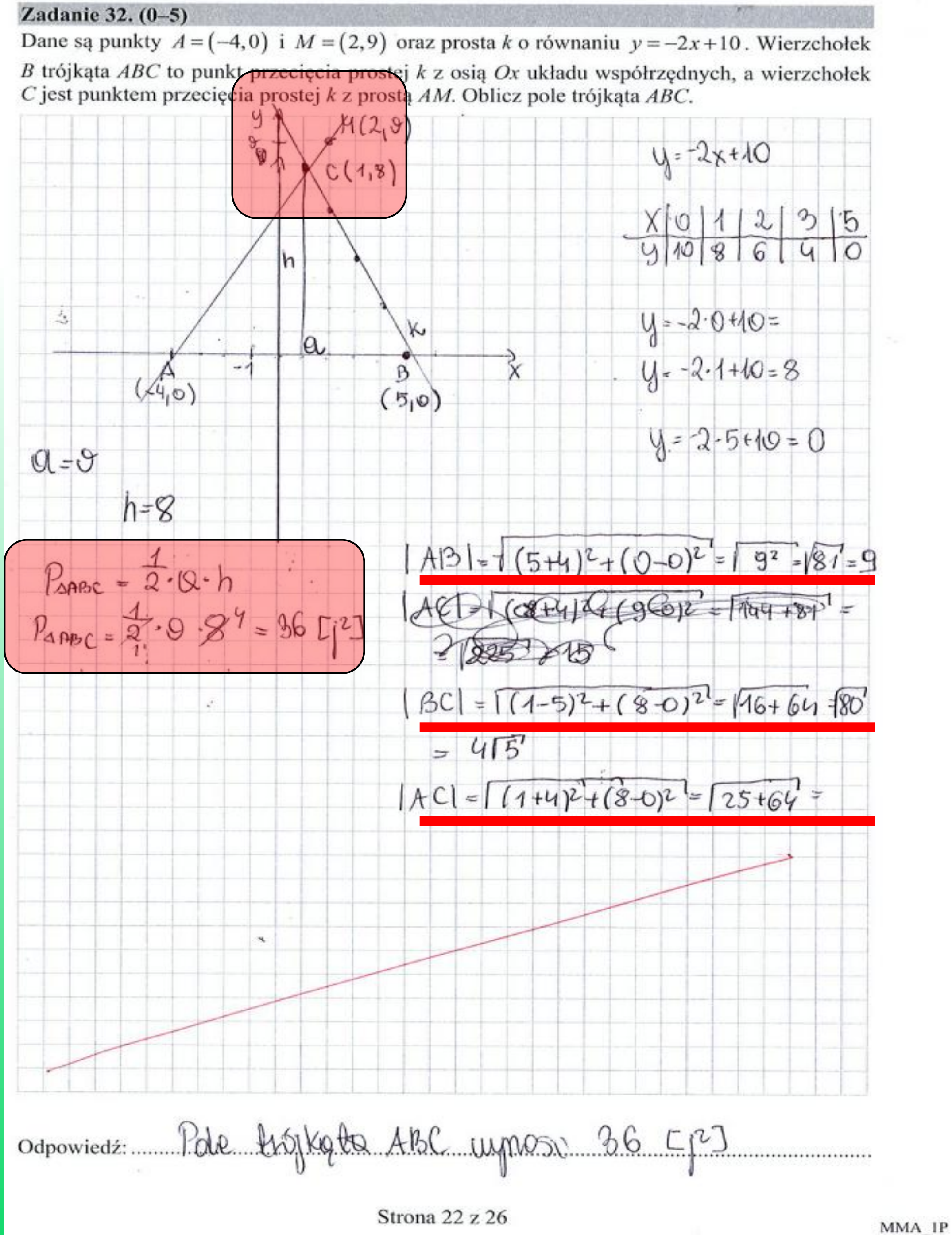
Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

Wskaźnik łatwości zadania = 0,27

22% opuszczeń

	32.
0 p.	53,2%
1 p.	17,6%
2 p.	5,7%
3 p.	2,9%
4 p.	6,1%
5 p.	14,4%



Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

$y=-2x+10$

x	0	1	2	3	5
y	10	8	6	4	0

$y=-2\cdot 0+10=$

$y=-2\cdot 1+10=8$

$y=-2\cdot 5+10=0$

$M(2,9)$, $C(1,8)$, $A(-4,0)$, $B(5,0)$

$a=9$

$h=8$

$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 8=36\ [j^2]$

$|AB|=\sqrt{(5+4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{9^2}=\sqrt{81}=9$

~~$|AC|=\sqrt{(8+4)^2+(9-0)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$~~

$|BC|=\sqrt{(1-5)^2+(8-0)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

$|AC|=\sqrt{(1+4)^2+(8-0)^2}=\sqrt{25+64}=$

Odpowiedź: Pole trójkąta ABC wynosi 36 $[j^2]$

Strona 22 z 26

MMA_1P

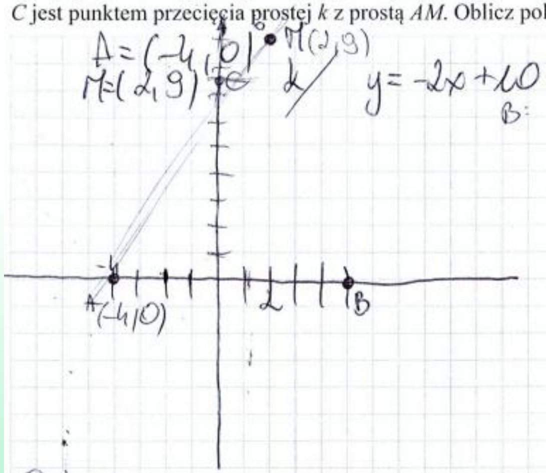
Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 12 p.

Upraszczanie problemu

Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$ oraz prosta k o równaniu $y=-2x+10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

$A=(-4,0)$ $M=(2,9)$ $y=-2x+10$



B: $0=-2x+10$, $-10=-2x$, $5=x$

$y=ax+b$
$0=a\cdot(-4)+b$
$0=-4a+b$
$4a=b$
$9=2a+b$
$9=2a+4a$
$9=6a$
$\frac{9}{6}=a$
$b=\frac{36}{6}=6$
$a=\frac{9}{6}$ $b=6$
$y=\frac{9}{6}x+6$

$\frac{9}{6}x+6=-2x+10$
$\frac{9}{6}x+2x=4$
$\frac{9}{6}x+\frac{12}{6}x=4$
$\frac{21}{6}x=4$
$21x=24$
$x=\frac{24}{21}=\frac{8}{7}$
$x=\frac{8}{7}$

$y=-2\left(\frac{8}{7}\right)+10$
$y=\frac{-16}{7}+10$
$y=\frac{-16}{7}+\frac{70}{7}$
$y=\frac{54}{7}$

$C\left(\frac{8}{7};\frac{54}{7}\right)$ $B=(5,0)$ $A(-4,0)$

$P=\frac{1}{2}\left|(5+4)\left(\frac{54}{7}-0\right)-(0-0)\left(\frac{8}{7}+4\right)\right|=$
$=\frac{1}{2}\left|\frac{486}{7}-\frac{36}{7}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{450}{7}=\frac{225}{7}\,j^2$

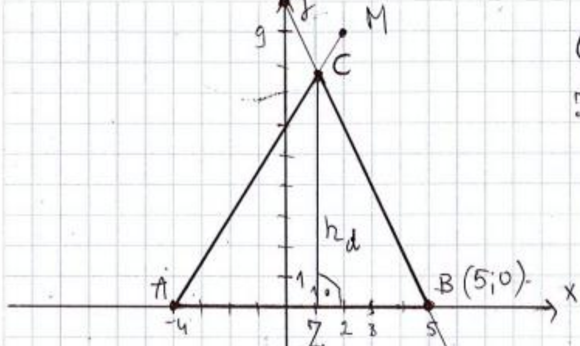
Odpowiedź: $\frac{225}{7}\,j^2$

Strona 22 z 26 MMA_1P

Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 15 p.

Kłopot z końcowymi obliczeniami pola trójkąta

Z arkusza, w którym zadania otwarte oceniono na 16 p.



$C=(1;7,5)$
$Z=(1;0)$

$A=(-4;0)$
$M=(2;9)$
$B=(5;0)$
$k=-2x+10$

odcinek AM wchodzi w skład prostej l.

$l: y=ax+b$

przechodzi ona przez punkty A i M o znanych współrzędnych

$y=-2\cdot 0+10$

$0=-2x+10$

$2x=10 \,/:2$

$x=5$

$\begin{cases} 0=-4a+b \\ 9=2a+b \,/\cdot(-1) \end{cases}$ $\Leftarrow\Rightarrow$ $b=4a$

$+\begin{cases} 0=-4a+b \\ -9=-2a-b \end{cases}$

$-9=-6a \,/:(-6)$

$a=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$

$b=4a=4\cdot 1,5=6$

$l: y=1,5x+6$

jedna ze współrzędnych punktu C jest 1 (współrzędna x)

$y=1,5+6$

$y=7,5$ $\Rightarrow$ $C=(1;7,5)$

$P=\frac{d\cdot h_d}{2}$

$d=|AB|$

$h=|CZ|$

$d=\sqrt{(5-(-4))^2+(0+0)^2}=$

$=\sqrt{9^2}=9$

$h_d=\sqrt{(1-1)^2+(7,5-0)^2}=\sqrt{(7,5)^2}=7,5$

$P=\frac{9\cdot 7,5}{2}=33,75 \,//\, [j^2]$

Odpowiedź: Pole wynosi $33,75\ j^2$.

Zmiana strategii na błędną

Poziom rozszerzony egzaminu, maj 2017

Arkusz dla poziomu rozszerzonego (nowa formuła):

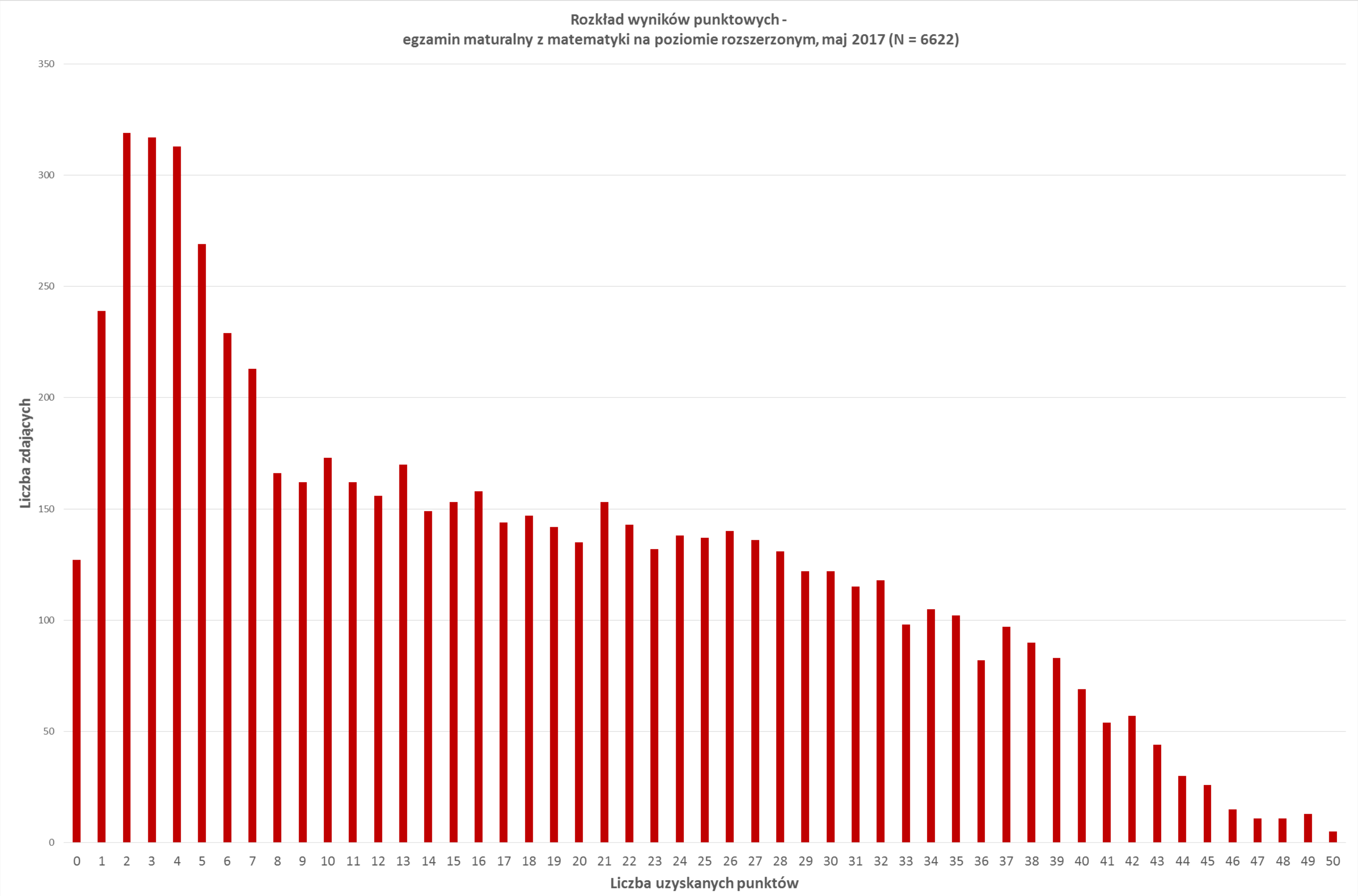
4 zadania zamknięte WW1 (0-1)

1 zadanie otwarte z kodowaną odpowiedzią (0-2)

10 zadań otwartych (3x3p, 3x4p, 2x5p, 1x6p, 1x7p)

6622 zdających (25,7%); średni wynik to 14,7 punktu

Rozkład wyników punktowych zdających, maj 2017 (PR)

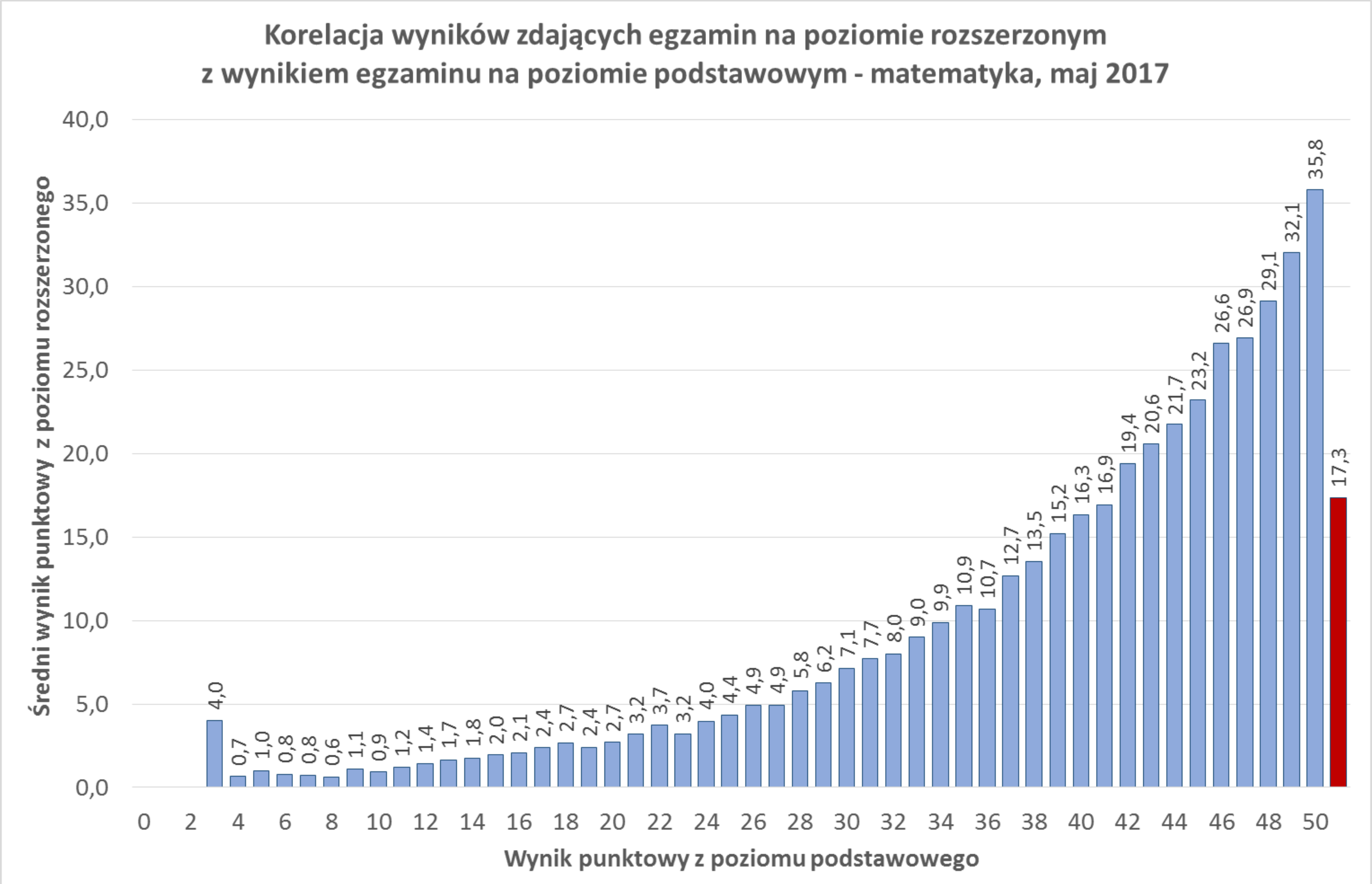


Korelacje wyniku PP i PR (fragment tabeli)

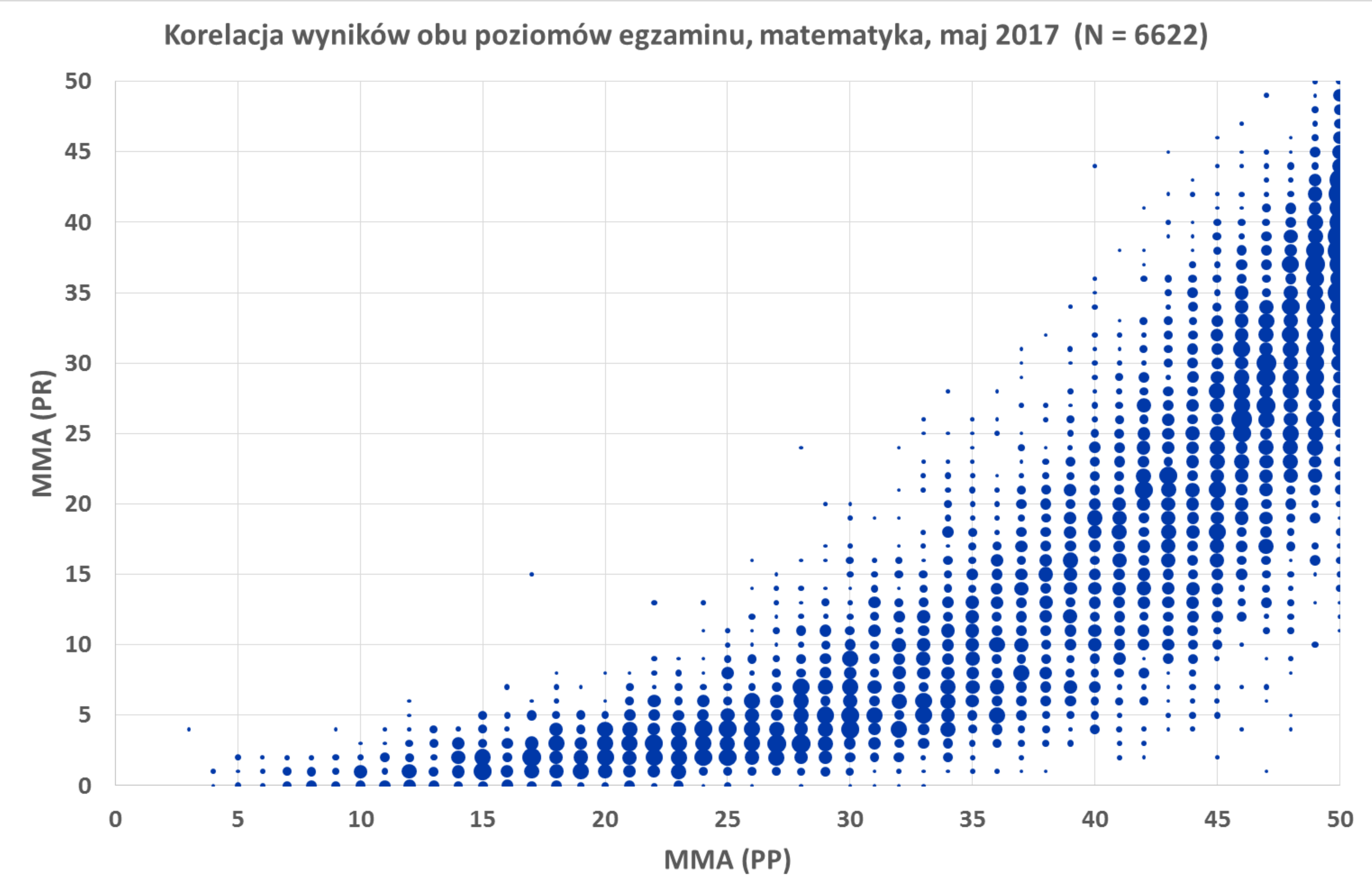
		Wynik punktowy poziomu rozszerzonego ->							
	Liczba pkt.	0	1	2	3	4	5	6	7
<- wynik punktowy z poziomu podstawowego	0								
	1								
	2								
	3					1			
	4	1	2						
	5	3	1	3					
	6	2	2	1					
	7	5	5	2					
	8	8	6	2					
	9	5	3	3		1			
	10	7	12	3	1				
	11	8	3	7	1	1			
	12	10	14	5	4	1	1	1	
	13	8	6	3	5	4			
	14	6	11	12	9	2			

201 zdających (3%)

Korelacje wyniku PP i PR (c.d.)



Korelacje wyniku PP i PR (c.d.)



Zadania zamknięte (PR)

W zadaniach od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa

A. 2 **B.** 4 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

0,60 (kraj: 0,62)

Zadanie 2. (0–1)

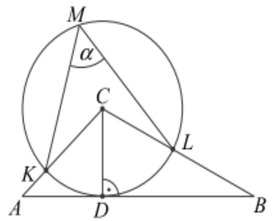
Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n=\dfrac{(n^2-10n)(2-3n)}{2n^3+n^2+3}$ dla $n\geq 1$. Wtedy

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$ **B.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ **C.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ **D.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\frac{3}{2}$

0,81 (kraj: 0,81)

Zadanie 3. (0–1)

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC, w którym $|AD|=|CD|=\frac{1}{2}|BC|$ (zobacz rysunek). Okrąg o środku C i promieniu CD jest styczny do prostej AB. Okrąg ten przecina boki AC i BC trójkąta odpowiednio w punktach K i L.



Zaznaczony na rysunku kąt α wpisany w okrąg jest równy

A. $37{,}5^\circ$ **B.** 45° **C.** $52{,}5^\circ$ **D.** 60°

0,80 (kraj: 0,81)

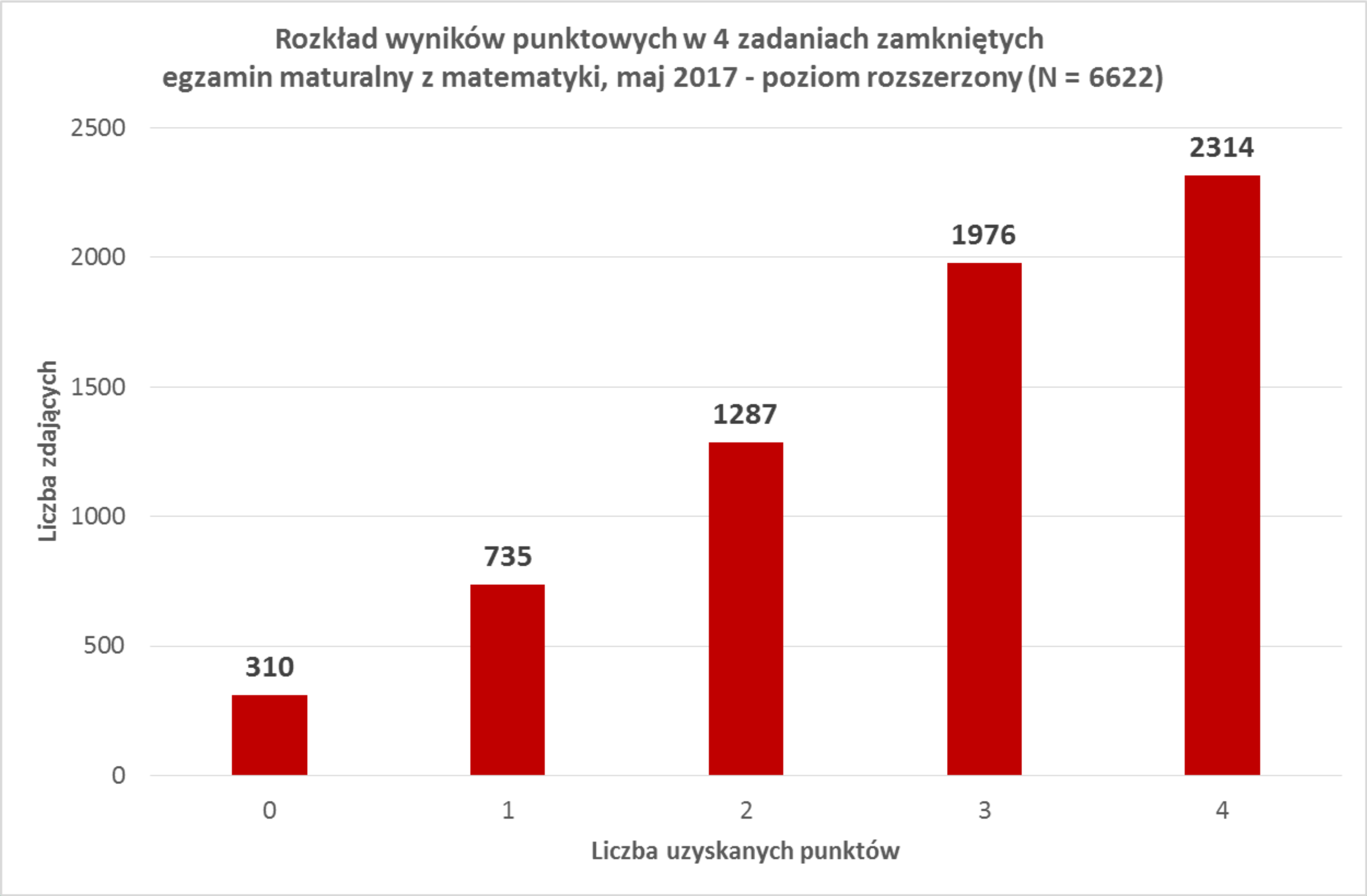
Zadanie 4. (0–1)

Dane są punkt $B=(-4,7)$ i wektor $\vec{u}=[-3,5]$. Punkt A, taki, że $\overrightarrow{AB}=-3\vec{u}$, ma współrzędne

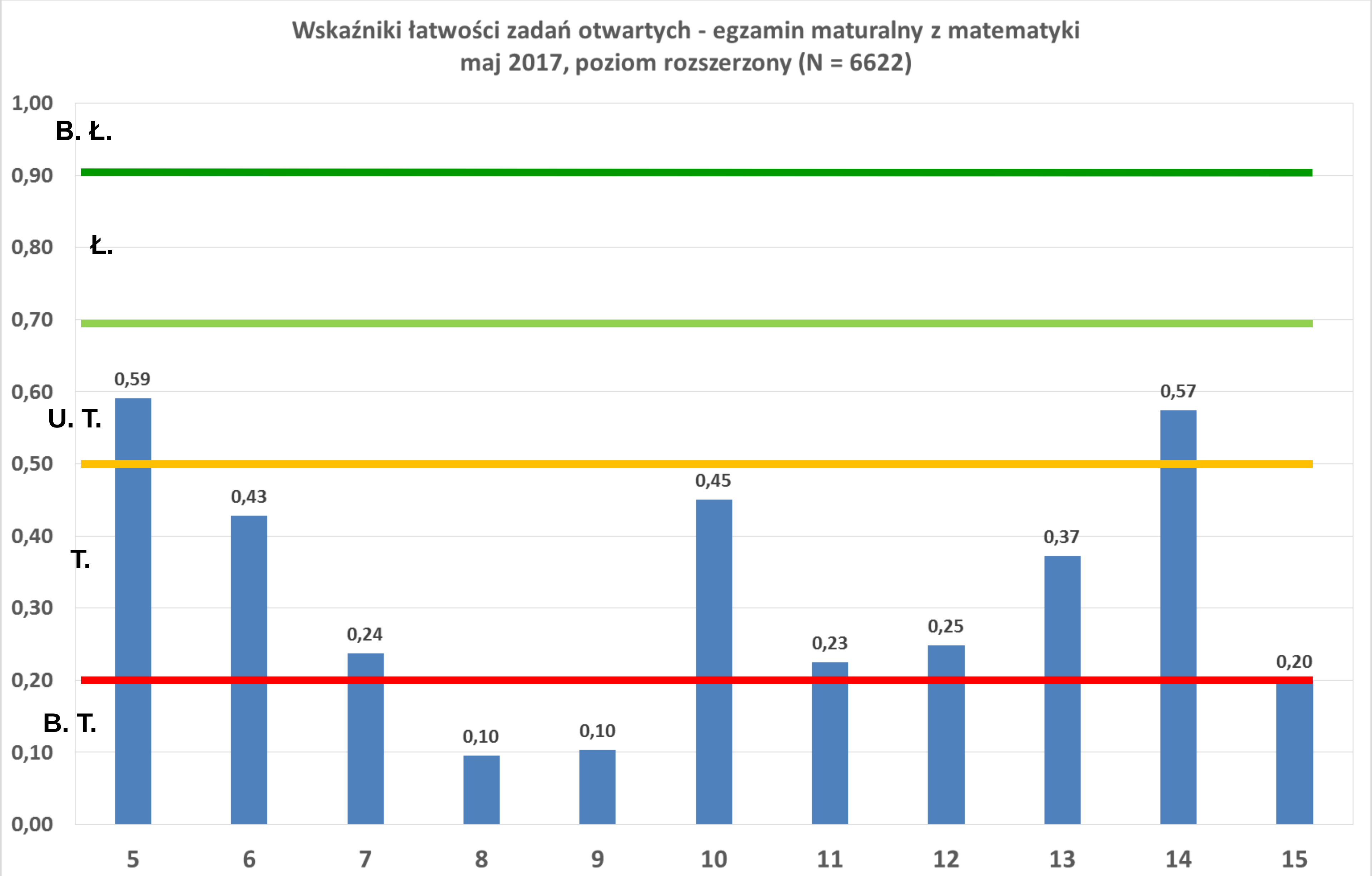
A. $A=(5,-8)$ **B.** $A=(-13,22)$ **C.** $A=(9,-15)$ **D.** $A=(12,24)$

0,58 (kraj: 0,61)

Zadania zamknięte w maju 2017 r. (PR)



Zadania otwarte, maj 2017 (PR)



KRAJ	0,61	0,45	0,26	0,11	0,12	0,47	0,23	0,28	0,40	0,60	0,24

Najtrudniejsze zadania otwarte, maj 2017 (PR)

Zadanie 8. (0–3)

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\dfrac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

0,10 (kraj: 0,11)

Zadanie 9. (0–4)

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

0,10 (kraj: 0,12)

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

0,20 (kraj: 0,24)

Opuszczenia zadań otwartych, maj 2017 (PR)

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
5,1%	**10,0%**	**9,5%**	**13,8%**	**23,6%**	**16,0%**	**8,2%**	**14,7%**	**10,8%**	**6,0%**	**24,7%**

Zadanie 9. (0–4)

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP, gdzie P jest punktem płaszczyzny π.

Wskaźniki łatwości zadań otwartych

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
0,59	**0,43**	**0,24**	**0,10**	**0,10**	**0,45**	**0,23**	**0,25**	**0,37**	**0,57**	**0,20**
0,61	***0,45***	***0,26***	***0,11***	***0,12***	***0,47***	***0,23***	***0,28***	***0,4***	***0,6***	***0,24***

Opuszczenia zadań otwartych

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
5,1%	**10,0%**	**9,5%**	**13,8%**	**23,6%**	**16,0%**	**8,2%**	**14,7%**	**10,8%**	**6,0%**	**24,7%**

Frakcja „zer” w zadaniach otwartych

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
40,9%	**46,6%**	**68,6%**	**85,9%**	**69,8%**	**40,3%**	**27,3%**	**55,9%**	**38,5%**	**15,8%**	**63,6%**

„Frakcja niemocy” w zadaniach otwartych

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
35,8%	**36,6%**	**59,1%**	**72,1%**	**46,2%**	**24,3%**	**19,1%**	**41,2%**	**27,7%**	**9,8%**	**38,9%**

Rozkłady punktów uzyskanych w 11 zadaniach otwartych, maj 2017 (PR)

Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15
40,9%	46,6%	68,6%	85,9%	69,8%	40,3%	27,3%	55,9%	38,5%	15,8%	63,6%
0,0%	12,5%	1,0%	5,1%	22,0%	10,4%	64,0%	13,1%	20,6%	14,5%	5,8%
59,1%	6,6%	20,9%	3,3%	6,5%	7,3%	3,7%	7,5%	7,9%	14,3%	6,8%
	34,2%	9,5%	5,7%	0,5%	13,1%	1,4%	7,9%	3,3%	4,0%	4,2%
				1,2%	29,0%	3,7%	5,5%	8,1%	2,4%	4,9%
							10,0%	21,5%	14,5%	5,2%
									34,6%	4,8%
										4,7%

Zadanie 15. - optymalizacja.

Zadanie 15. (0–7)

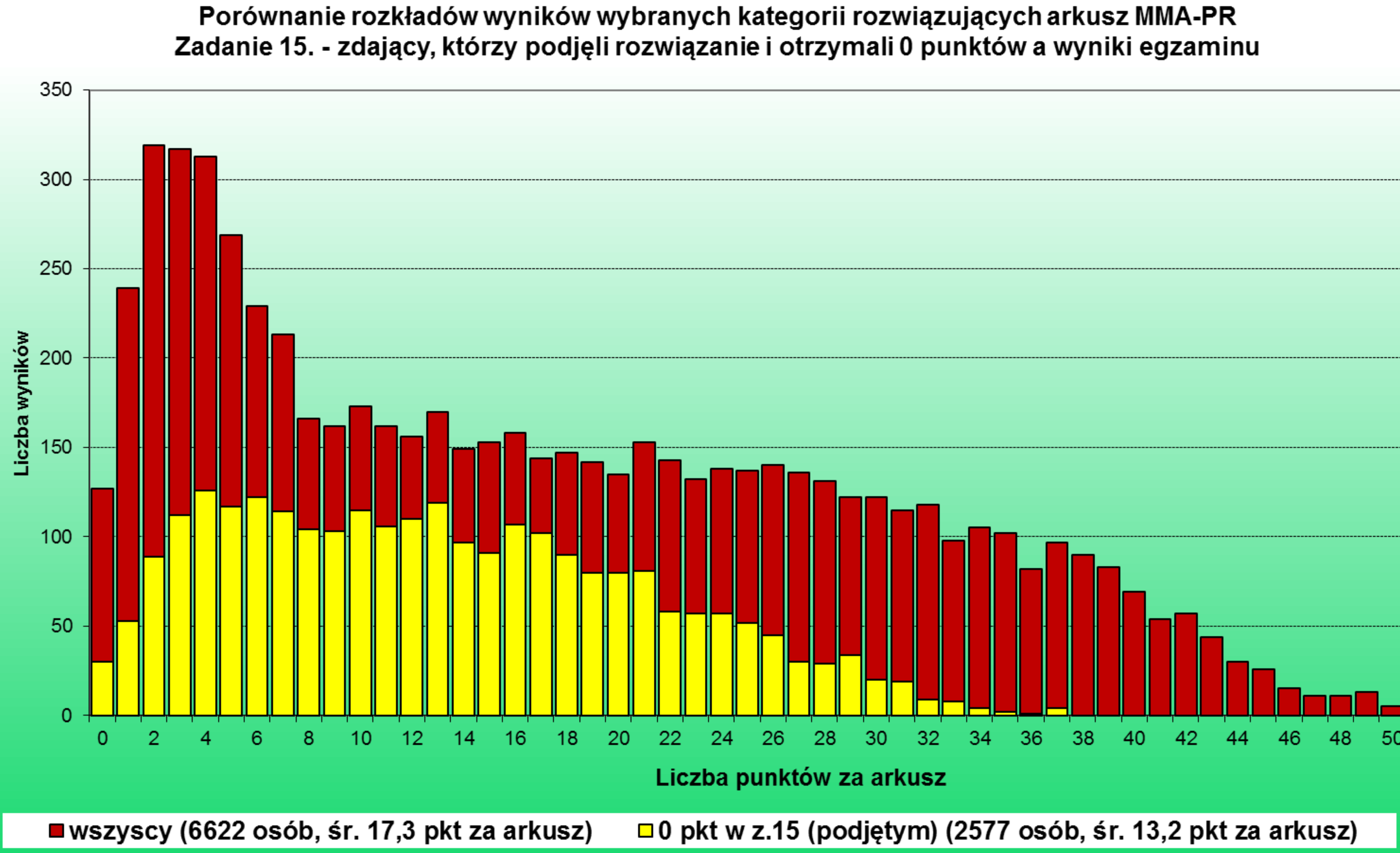
Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej *P*. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Wskaźnik łatwości = 0,20 (w kraju: 0,24)

24,7% opuszczeń

0	63,6%
1	5,8%
2	6,8%
3	4,2%
4	4,9%
5	5,2%
6	4,8%
7	4,7%

Korelacje „zer” w Z15 z wynikiem egzaminu

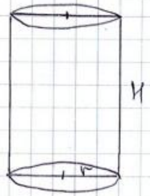


Z arkusza ocenionego na 32 p.

Realizacja algorytmu – a gdzie wnioskowanie?

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.



$V = P_p \cdot H \qquad P_p = \pi r^2$

$V \to max$

$V = \pi r^2 \cdot H$

pole powierzchni całkowitej (jest to liczba)

Dane: $P_c = 2\pi r(r+H)$

$\frac{P}{2\pi r} = r + H$

$H = \frac{P}{2\pi r} - r$

$r > 0$

$H > 0$

$V = \pi r^2 \cdot \left(\frac{P}{2\pi r} - r\right) = \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{P}{2\cancel{\pi r}} - \pi r^3 =$

$= \frac{Pr}{2} - \pi r^3$

$V(r) = \frac{Pr}{2} - \pi r^3$

$V'(r) = -3\pi r^2 + \frac{1}{2}P$

$V'(r) = 0$

$-3\pi r^2 + \frac{1}{2}P = 0$

$-3\pi r^2 = -\frac{1}{2}P \quad /:(-1)$

$3\pi r^2 = \frac{1}{2}P$

$r^2 = \frac{P}{6\pi}$

$r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

$H = \frac{P}{2\pi r} - r = \frac{P}{2\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} =$

$= \frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{2\pi \cdot \frac{P}{6\pi}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{3P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{P} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} =$

$= 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

~~$V = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{P}{6\pi} \cdot 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{P\sqrt{\frac{P}{6\pi}}}{3}$~~

$V_{max} = \frac{Pr}{2} - \pi r^3 = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} - \pi\left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right)^3 =$

$= \frac{P}{2}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} - \frac{\pi P}{6\pi}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{P}{2}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} - \frac{P}{6}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} =$

$= \frac{3P}{6}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} - \frac{P}{6}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{2P}{6}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}} \quad [j^3]$

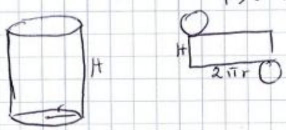
Odpowiedź: promień podstawy $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, wysokość walca $H = 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, $V = \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Z arkusza ocenionego na 40 p.

„Szybkie” rozwiązanie.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.



$r>0 \quad H>0$

$2\pi r^2 + 2\pi r H = P$

$r^2 + rH = \frac{P}{2\pi}$

$r(r+H) = \frac{P}{2\pi}$

$r+H = \frac{P}{2\pi r}$

$H = \frac{P}{2\pi r} - r$

$V = \pi r^2 H$

$V(r) = \pi r^2\left(\frac{P}{2\pi r} - r\right) = \frac{Pr}{2} - \pi r^3 = \frac{P}{2}r - \pi r^3$

$V'(r) = -3\pi r^2 + \frac{1}{2}P$

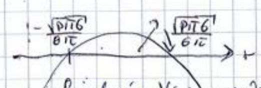
$V'(r) = 0$

$3\pi r^2 = \frac{1}{2}P$

$r^2 = \frac{P}{6\pi}$

$r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}} \lor r = -\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

$r = \frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi} \lor r = -\frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi}$



funkcja $V(r)$ przyjmuje maksimum lokalne w $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

$H = \frac{P}{2\pi r} - r = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi}} - \frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi} =$

$= \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{6\pi}{\sqrt{P\pi 6}} - \frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi} =$

$= \frac{3P\sqrt{P\pi 6}}{P\pi 6} - \frac{\sqrt{P\pi 6}}{6\pi} = \frac{3\sqrt{P\pi 6} - \sqrt{P\pi 6}}{\pi 6} =$

$= \frac{\sqrt{6P\pi}}{2\pi}$

$r = \frac{\sqrt{6\pi P}}{6\pi} \qquad H = \frac{\sqrt{6\pi P}}{2\pi}$

$V\left(\frac{\sqrt{6\pi P}}{6\pi}\right) = \frac{P}{6\pi} \cdot \frac{\sqrt{6\pi P}}{2\pi} = \frac{P\sqrt{6\pi P}}{12\pi^2}$

Odpowiedź: $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{\sqrt{6\pi P}}{6\pi} \quad H = \frac{\sqrt{6\pi P}}{2\pi} \quad V = \frac{P\sqrt{6\pi P}}{12\pi^2}$

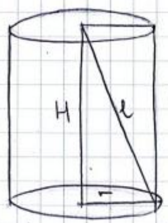
Z arkusza ocenionego na 25 p.

Błędny model – zdający pominął daną wartość P

0p

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.



$l > 0 \quad H > 0$

P - pole powierzchni $l \in (0, V)$

$V = \pi r^2 \cdot H$

$P = 2\pi r(r + H)$

$V(H) = \pi (l^2 - H^2) H$

$r^2 = l^2 - H^2$

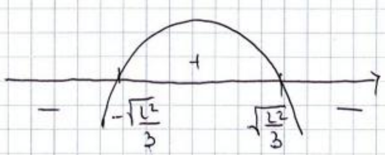
$\boxed{V(H) = \pi (l^2 H - H^3)}$

$V'(H) = \pi (l^2 - 3H^2)$

$l^2 - 3H^2 = 0$

$H^2 = \frac{l^2}{3}$

$H = \sqrt{\frac{l^2}{3}} \quad \vee \quad H = -\sqrt{\frac{l^2}{3}}$



$V'(H)$ jest ujemna na przedziale $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{l^2}{3}}\right) \wedge \left(\sqrt{\frac{3l^2}{3}}, +\infty\right)$

$V'(H)$ jest dodatnia na przedziale $\left(-\sqrt{\frac{l^2}{3}}, \sqrt{\frac{l^2}{3}}\right)$

czyli $V(H)$ jest malejąca na przedziale $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{l^2}{3}}\right)$ a rośnie na przedziale $\left(-\sqrt{\frac{l^2}{3}}, \sqrt{\frac{l^2}{3}}\right)$ czyli w punkcie $-\sqrt{\frac{l^2}{3}}$ osiąga minimum, a maksimum osiąga w $\sqrt{\frac{l^2}{3}}$, bo rośnie na przedziale $\left(-\sqrt{\frac{l^2}{3}}, \sqrt{\frac{l^2}{3}}\right)$ a maleje na $\left(\sqrt{\frac{l^2}{3}}, +\infty\right)$.

$V(H) = \pi(l^2 H - H^3) = \pi l^2 \sqrt{\frac{l^2}{3}} - \pi \frac{l^2}{3}\sqrt{\frac{l^2}{3}}$

$H = \sqrt{\frac{l^2}{3}}$

$r^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{3l^2 - l^2}{3} = \frac{2l^2}{3}$

$r = \frac{\sqrt{2l^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\,l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}\,l}{3}$

Odpowiedź: Objętość wynosi $\pi l^2 \sqrt{\frac{l^2}{3}} - \pi \frac{l^2}{3}\sqrt{\frac{l^2}{3}}$, promień $\frac{\sqrt{6}\,l}{3}$, a $H = \sqrt{\frac{l^2}{3}}$

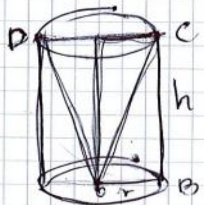
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	0

Z arkusza ocenionego na 24 p.

Podana wartość P została „zignorowana”.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.



r – promień podstawy walca

h – wysokość walca

$P = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$P_{\Delta OCD} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = r\cdot h$

$= \sqrt{2r+h\left(\frac{2r+h}{2}-r\right)\left(\frac{2r+h}{2}-h\right)}$

ponieważ $r, h > 0$

$r^2h^2 = 2r+h\left(\frac{2r+h}{2}-r\right)\left(\frac{2r+h}{2}-h\right)$

$P = 2\pi r(r+h)$

$P - 2\pi r^2$

$\dfrac{1}{\frac{h-2}{2}} = \dfrac{r-2}{2}$

$1 \cdot \dfrac{2}{h-2} = \dfrac{r-2}{2}$

$\dfrac{2}{h-2} = \dfrac{r-2}{2} \quad / \cdot 2$

$\dfrac{h-2}{2} = \dfrac{2}{r-2} \quad / \cdot 2$

$h-2 = \dfrac{4}{r-2}$

$h = \dfrac{4+2r-4}{r-2} = \dfrac{2r}{r-2}$

$V = \pi r^2 \cdot \dfrac{2r}{r-2} = 2\pi \dfrac{r^3}{r-2}$

Objętość będzie największa dla największej wartości

$f(r) = \dfrac{r^3}{r-2}$

$f'(r) = \dfrac{3r^2(r-2) - r^3 \cdot 1}{(r-2)^2} = \dfrac{3r^3-6r^2-r^3}{(r-2)^2} = \dfrac{2r^3-6r^2}{(r-2)^2}$

w.k. $f'(r) = 0 \iff 2r^3 - 6r^2 = 0$

$2r^2(r-6) = 0$

$r = 0 \lor r = 6$

nie spełnia warunków

$f''(r) < 0$

Objętość będzie największa dla $r = 6$ $h = \frac{12}{4} = 3$

$V = \pi \cdot 36 \cdot 3 = 108\pi$

Odpowiedź: Największa objętość będzie dla $r=6$ $h=3$ i będzie ona równa 108π.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	0

Z arkusza ocenionego na 29 p.

Objętość „walca” funkcją dwóch zmiennych.

Zadanie 15. (0–7)

0p

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

H

$P_C = 2\cdot P_p + P_b = P$

$P_p = \pi r^2$

$P_b = 2\pi r\cdot H$

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \cancel{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot H$

$P = \pi r^2 + 2\pi r\cdot H =$

$= \pi r(r+2)\cdot H$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot H$

$P = \pi r(r+2)\cdot H$

$H>0$

$P = \pi r^2 + 2\pi r\cdot H$

$\pi r^2 = P - 2\pi r H$

$V = \frac{1}{3}(P - 2\pi r H)H$

$V = \frac{1}{3}PH - \frac{1}{3}2\pi r H^2$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	15.
	Maks. liczba pkt	7
	Uzyskana liczba pkt	0p

Zaskakująco słabe wyniki w zadaniu nr 11

Zadanie 11. (0–4)

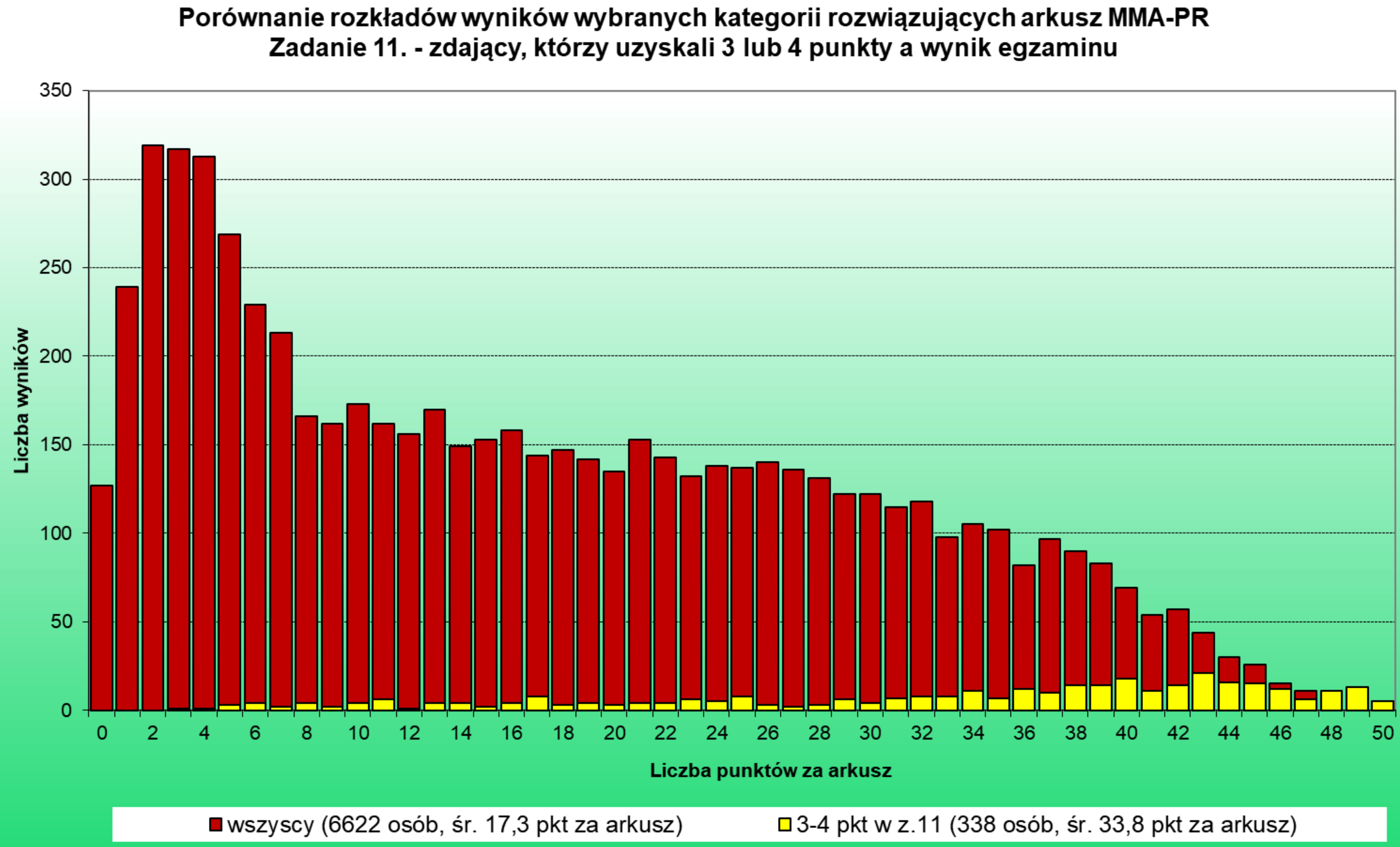
W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Wskaźnik łatwości zadania = 0,23

8,2% opuszczeń

0	27,3%
1	64,0%
2	3,7%
3	1,4%
4	3,7%

Korelacje „3” i „4” w Z11 z wynikiem egzaminu



Z arkusza ocenionego na 46 p.

Zdający zbudował błędny model.

0

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

~~Ω – wszystkie możliwe~~

~~P – wyl. liczba jest parzysta~~

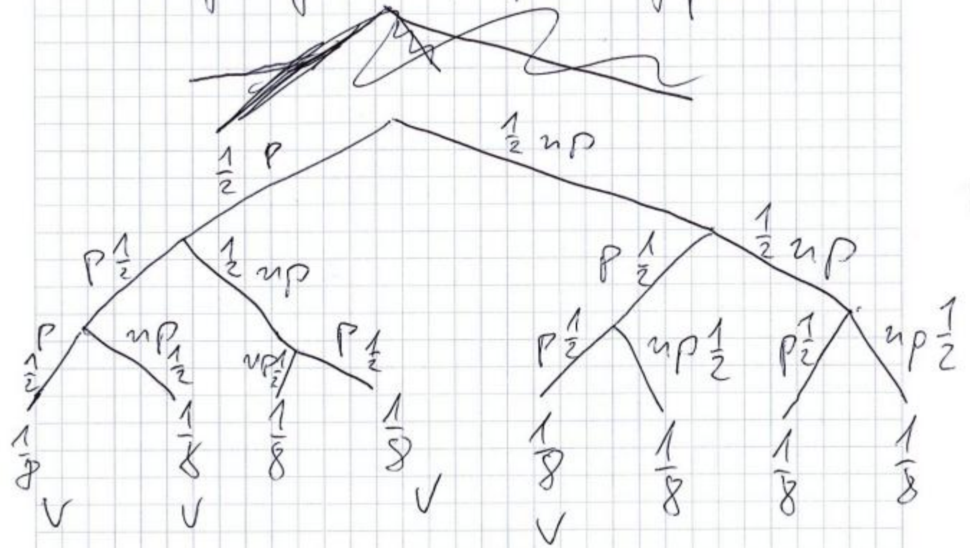
~~NP – wyl.~~

~~Ω wyl~~

p – wyl. kulka ma parzysty numer

np – wyl. kulka ma nieparzysty numer

√ – iloczyn wyl. liczb jest podzielny przez 4



$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: To prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt	4	0

Z arkusza ocenionego na 41 p.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

$\overline{\overline{\Omega}} = 8^3 = 512$

A – iloczyn podzielny przez 4

~~[illegible]~~

1° 4n trzy razy 2° 4n dwa razy 3° 4n raz

A' – niepodzielny przez 4

4n zero razy

$\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$\overline{6}\ \overline{6}\ \overline{6}$

$\overline{\overline{A'}} = 6^3 = 216$

$\overline{\overline{A}} = 512 - 216 = 296$

$P(A) = \frac{296}{512} = \frac{74}{128} = \frac{37}{64}$

Odpowiedź: $\frac{37}{64}$

Powierzchowna analiza.

Z arkusza ocenionego na 40 p.

Zmiana strategii.

Dobre rozpoznanie przypadków, z lukami w komentarzach.

Ten sam błąd w zliczaniu w dwóch przypadkach

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

$\Omega =$ 512

A – wylosowanie takich piłeczek, że iloczyn zapisanych liczb jest podzielny przez 4

Żeby iloczyn był podzielny przez 4 musiała być wylosowane:

- conajmniej jedna 8
- conajmniej jedna 4
- conajmniej dwie 2
- jedna 2 i conajmniej jedna 6
- conajmniej dwie 6

A' – wylosowanie takich piłeczek, że iloczyn zapisanych liczb nie jest podzielny przez 4

Iloczyn będzie niepodzielny przez 4, gdy:

- nie będzie ani jednej 4
- nie będzie ani jednej 8
- może być tylko jedna 2
- nie będzie wylosowana w trzech rzutach jednocześnie 2 i 6
- 6 może być tylko raz

1° jest 2, nie ma 6

$\frac{2}{1} \cdot \underbrace{\_ \cdot \_}_{4 \cdot 4} = 16$ możliwości

2° jest 6, nie ma 2

$\frac{6}{1} \cdot \underbrace{\_ \cdot \_}_{4 \cdot 4} = 16$ możliwości

3° nie ma 2 ani 6

$\underbrace{\_ \cdot \_ \cdot \_}_{4 \cdot 4 \cdot 4} = 64$ możliwości

c.d.

$P(A') = \frac{96}{512} = \frac{48}{256} = \frac{24}{128} = \frac{12}{64} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo to jest równe $\frac{13}{16}$.

Z arkusza ocenionego na 39 p.

Brak uogólnienia

Błędne zliczanie zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

1 2 3 4 5 6 7 8

$4 | xyz$

$\Omega = 8^3 = 512$

iloczyn liczb ~~trzy liczby~~ pp. 4, jeśli wszystkie trzy pp. 4 ~~4 lub 8~~ 4 lub 8

iloczyn pp. 4 jeśli przez 2, 2

iloczyn niepodzielny przez 4, jeśli wylosujemy

1, 2, 1 – 3 szanse
1, 3, 1 – 3 szanse
1, 5, 1 – 3 szanse
1, 7, 1 – 3 szanse
1, 1, 1 – 1
1, 3, 3 – 3
1, 5, 5 – 3
1, 7, 7 – 3
2, 7, 7 – 3
2, 5, 5 – 3
2, 3, 3 – 3
6, 7, 7 – 3
6, 3, 3 – 3
6, 5, 5 – 3
1, 5, 7 – 6
1, 3, 5 – 6
1, 3, 7 – 6
1, 6, 3 – 6
1, 6, 5 – 6
1, 6, 7 – 6

1, 2, 3 – 6 szans
1, 2, 5 – 6 szans
1, 2, 7, 6
2, 3, 5 – 6
2, 3, 7 – 6
3, 5, 7 – 6
3, 3, 3 – 1
5, 5, 5 – 1
7, 7, 7 – 1
7, 6, 5 – 6
7, 2, 5 – 6

P(A)

$\bar{A}'$

~~$\bar{A} = 512 - \bar{A}' = 512 - 121$~~

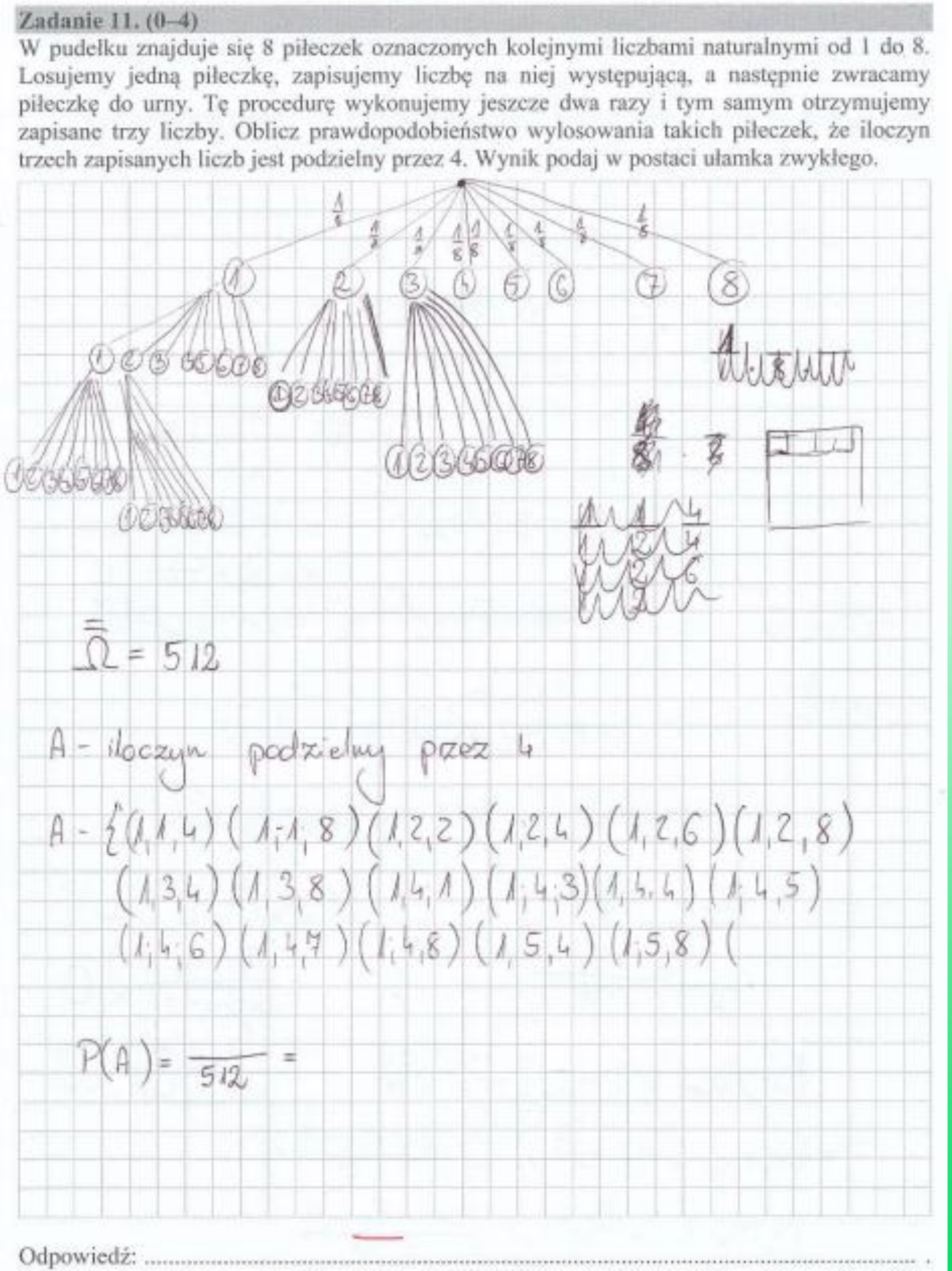
~~$P(A) = \frac{391}{512}$~~

$P(A) = \frac{385}{512}$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{385}{512}$

Z arkusza ocenionego na 21 p.

Próba wypisywania zdarzeń sprzyjających.



Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

$\overline{\overline{\Omega}} = 512$

A - iloczyn podzielny przez 4

A - {(1,1,4) (1,1,8) (1,2,2) (1,2,4) (1,2,6) (1,2,8)
(1,3,4) (1,3,8) (1,4,1) (1,4,3) (1,4,4) (1,4,5)
(1,4,6) (1,4,7) (1,4,8) (1,5,4) (1,5,8) (

$P(A) = \frac{}{512} =$

Odpowiedź: ....

Z arkusza ocenionego na 35 p.

Błędnie rozpoznane przypadki.

Błędne zliczanie.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Iloczyn trzech liczb jest podzielny przez 4 jeżeli jest on wielokrotnością liczby 4.

Zdarzenia temu sprzyjające (liczby, których iloczyn jest podzielny przez 4):

A – zdarzenie kiedy iloczyn jest podzielny przez 4.

(1,1,4) ; (1,1,8) ; (1,2,2) ; ~~(4,2,8)~~ ;

Wszystkie liczby z co najmniej jedną 8 v 4

Wszystkie liczby z co najmniej 2 dwójkami

Wszystkie liczby z dwiema 6 v 6 ∧ 2

Liczby zawierające 8 (co najmniej jedną)

$\binom{3}{1}\cdot 8\cdot 8 = 192$

192
147
36 18
30

Liczby zawierające 4 bez ósemek (co najmniej 1)

$\binom{3}{1}\cdot 7\cdot 7 = 147$

Liczby zawierające co najmniej 2 dwójki, bez 8 ∧ 4

$\binom{3}{2}\cdot 6 = 18$

Liczby zawierające co najmniej 2 szóstki bez 8 ∧ 4 ∧ 2

$\binom{3}{2}\cdot 5 = 15$

$\overline{\overline{\Omega}} = 8\cdot 8\cdot 8 = 512$

~~$P(A) = \frac{192+147+36+30}{512} = \frac{405}{512}$~~

$P(A) = \frac{372}{512}$

~~P(A) = 0,791015625~~

$P(A) = 0{,}7265625$

Odpowiedź: $P(A) = 0{,}7265625$

Z arkusza ocenionego na 34 p.

Dobrze rozpoznane trzy rozłączne przypadki.

Błędne zliczanie w dwóch przypadkach.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

$\bar{\bar{\Omega}} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

A – iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4

1° liczba podzielna przez 4 i 2 liczby nieparzyste

są 2 takie liczby: 4 i 8 — nieparzyste są 4

$\cancel{C_4^2 = 6}$

$2 \cdot 16 = 32$

2° dwie liczby parzyste i jedna nieparzysta

parzyste są 4 — 4

$\cancel{C_4^2 = 6}$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

3° trzy liczby parzyste

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

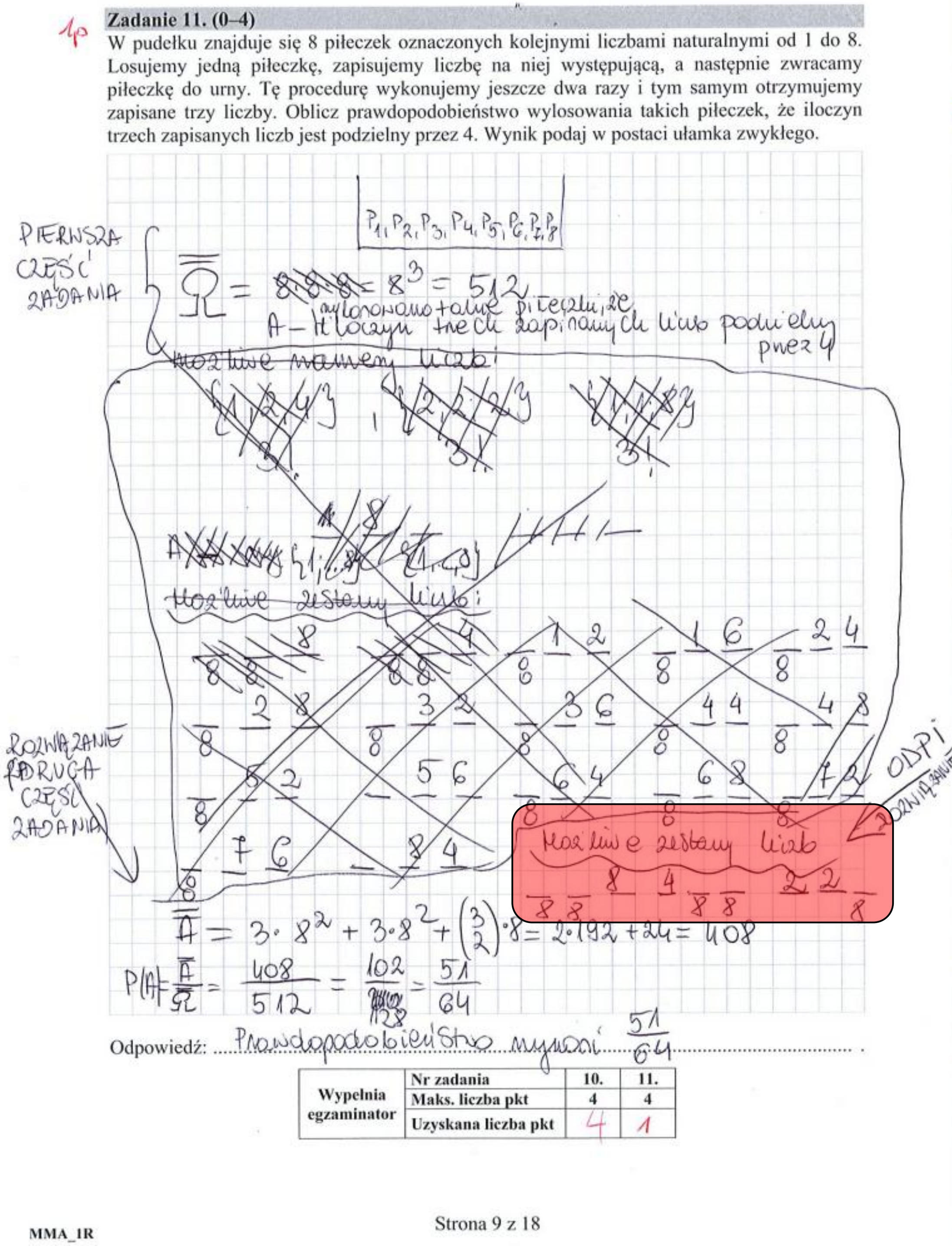
Razem: $64 + 64 + 32 = 160$

$\bar{\bar{A}} = 160$

$P(A) = \frac{\bar{\bar{A}}}{\bar{\bar{\Omega}}} = \frac{160}{512} = \frac{80}{256} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{5}{16}$.

Z arkusza ocenionego na 32 p.



Zadanie 11. (0–4)
W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

PIERWSZA CZĘŚĆ ZADANIA

$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$

$\overline{\overline{\Omega}} = \cancel{8\cdot 8\cdot 8} = 8^3 = 512$

A – wylosowano takie piłeczki, że iloczyn trzech zapisanych liczb podzielny przez 4

~~Możliwe mamy liczb:~~

~~Możliwe zestawy liczb:~~

ROZWIĄZANIE DRUGA CZĘŚĆ ZADANIA

Możliwe zestawy liczb

$\overline{\overline{A}} = 3\cdot 8^2 + 3\cdot 8^2 + \binom{3}{2}\cdot 8 = 2\cdot 192 + 24 = 408$

$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{408}{512} = \frac{102}{128} = \frac{51}{64}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{51}{64}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt	4	1

Błędnie rozpoznane trzy przypadki.

Z arkusza ocenionego na 32 p.

Błędnie rozpoznanych pięć przypadków.

1

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Ω – wylosowanie trzech piłeczek z liczbami od 1 do 8

A – iloczyn trzech zapisanych liczb z piłeczek jest podzielny przez 4

$\overline{\overline{\Omega}} = 8^3 = 512$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

I. Gdy chociaż jedna wylosowana piłeczka będzie 4. dla każdych kolejnych liczb jest spełniony warunek.

$1 \cdot \boxed{4} \cdot 7 \cdot 7 +$
$7 \cdot (4) \cdot 7 +$ $= 147$ przypadków
$7 \cdot 7 \cdot (4) +$

II. Warunek jest spełniony, gdy wylosujemy liczby których iloczyn jest dwa razy podzielny przez 2 bez ósemki, czyli $\{2, 6\}$

$C^3_2 \cdot 2 \cdot 4 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 8 = 24$ przypadków

III. Gdy wylosujemy dwie czwórki:

$(4) \cdot 7 \cdot (4) +$
$(4)(4) \cdot 7 +$ $= 21$ przypadków
$7 \cdot (4)(4) +$

IV. Gdy wylosujemy same czwórki:

$(4)(4)(4) = 1$ przypadek

V. Gdy wylosujemy jedną, dwie lub same ósemki:

$(8) \cdot 7 \cdot 7 +$ / $7 \cdot (8) \cdot 7 +$ / $7 \cdot 7 \cdot (8) +$ $+$ $(8) \cdot 7 \cdot (8) +$ / $(8)(8) \cdot 7 +$ / $7 \cdot (8)(8) +$ $+$ $(8)(8)(8)$ $= 120$ przypadków

$\overline{\overline{A}} = 147 + 24 + 21 + 1 + 120 = 313$

$P(A) = \frac{313}{512}$

Odpowiedź: $P(A) = \frac{313}{512}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	10.	11.
	Maks. liczba pkt	4	4
	Uzyskana liczba pkt	4	1

Z arkusza ocenionego na 27 p.

Brak pomysłu.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

A – iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4

$\Omega = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

Odpowiedź: ....

Prośba zamiast podsumowania

- **Prowadzenie obliczeń na liczbach rzeczywistych**
- **Przekształcenia algebraiczne**
- **Modelowanie i strategie w zadaniach rozszerzonej odpowiedzi**

Bardzo dziękuję Państwu za uwagę.

Wciąż sporo jest takich rozwiązań

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \le 0$.

$8x^2 - 72x \le 0$

$\cancel{8x^2 x} \quad x(8x - 72) \le 0$

$\Downarrow$

$x = 0 \ \vee \ 8x - 72 = 0$

$8x = 72$

$x = 9$

Odpowiedź: $x = 0, \ x = 9$

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \le 0$.

$8x^2 - 72x \le 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

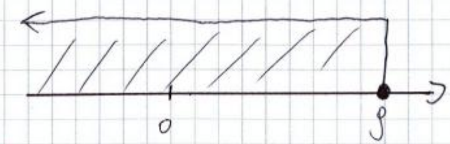
$\Delta = 72^2 - 4 \cdot 8 \cdot 0$

$\Delta = 5184$

$\sqrt{\Delta} = 72$

$x_1 = \frac{72 - 72}{16} \qquad x_2 = \frac{72 + 72}{16}$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 9$



Odpowiedź: $x \in (-\infty, 9\rangle$

Nierówność kwadratowa - frakcje zer na 9 maturach

Matura próbna 2009	**Zadanie 26.** (*2 pkt*) Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \le 0$.	38,3%
Matura majowa 2010	**Zadanie 26.** ***(2 pkt)*** Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \le 0$.	29,4%
Matura próbna 2010	**Zadanie 26.** ***(2 pkt)*** Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \le 0$.	29,1%
Matura majowa 2011	**Zadanie 24.** ***(2 pkt)*** Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.	14,4%
Matura majowa 2012	**Zadanie 26.** ***(2 pkt)*** Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.	18,6%
Matura majowa 2013	**Zadanie 30.** ***(2 pkt)*** Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \ge 0$.	20,3%
Matura majowa 2015	**Zadanie 26. (0–2)** Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.	23,5%
Matura majowa 2016	**Zadanie 27. (0–2)** Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > 3x^2 - 6x$.	33,7%
Matura majowa 2017	**Zadanie 26. (0–2)** Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \le 0$.	29,6%

Pozostałe trzy umiarkowanie trudne zadania

Zadanie 30. (0–2)

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 31. (0–2)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

Zadanie 33. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Matura majowa 2016, (PP)

Zadanie 33. (0–5)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.